

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅 

管理

2022年3月						
日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动你的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457199

排名 - 1199

多变量微积分笔记19——直角坐标系和柱坐标系下的三重积分

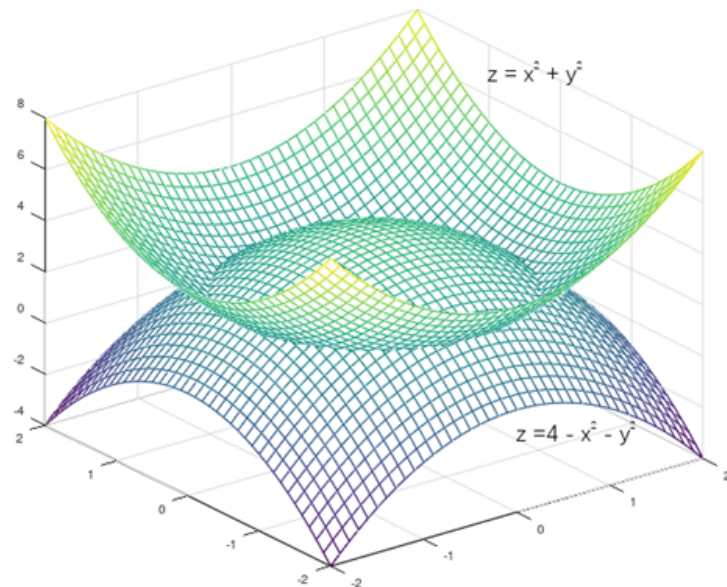
三重积分

三重积分由平面转到了空间，但本质上与二重积分一致。 $f(x,y,z)$ 是空间函数，对应的三重积分是：

$$\iiint_R f dv$$

其中 R 区域是 f 在定义域范围内的图形的体积， dv 是体积积元。在二重积分中，面积积元 $dA = dydx$ ，三重积分的体积积元 $dv = dzdydx$ 。

考虑计算两个曲面 $z = x^2 + y^2$ 和 $z = 4 - x^2 - y^2$ 围成的图形的体积。注意这里没有给出被积函数，两个曲面表示了积分域。



用三重积分表示所求体积，并用 z 作为最内层积分：

$$V = \iiint_{x^2+y^2}^{4-x^2-y^2} dz dy dx$$

上式处理了 z 轴，剩下的是 $dydx$ ，这就和二重积分一样了。现在需要关注的是所求曲面在 xy 轴上的投影，找出投影的边界值。

从两个曲面的方程可知，投影是圆， x 和 y 的取值范围就是圆内的所有点，问题是如何求得圆的方程？

还是从所求曲面的图形入手，在这个曲面中 z 的范围已知，就是 z 轴的积分域：

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析（一）(29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型（一）(8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型（一）(5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

$$x^2 + y^2 < z < 4 - x^2 - y^2$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 < 4 - x^2 - y^2$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 < 2$$

这就是x,y的取值范围，也就是半径为sqrt(2)的圆内的所有点。用二重积分表示圆的面积：

$$Area = \iint_R dA = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} dydx$$

将Area和并到三重积分中：

$$V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{4-x^2-y^2} dzdydx$$

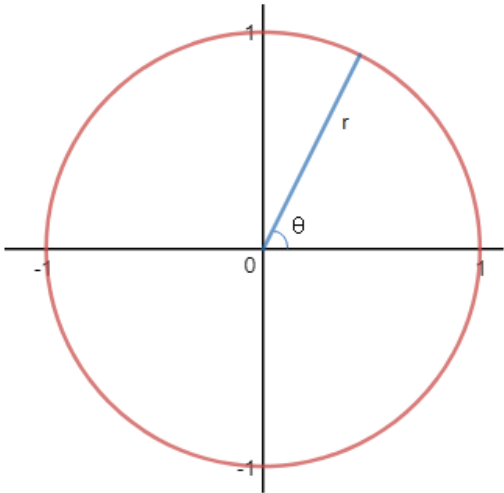
实际上对dz的积分是曲面的高度，dydx是面积，三重积分可以看做二者的乘法。

计算过程和二重积分类似，由内而外逐一计算：

$$\int_{x^2+y^2}^{4-x^2-y^2} dz = 4 - 2x^2 - 2y^2$$
$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} 4 - 2x^2 - 2y^2 dydx = \dots$$

柱坐标系

继续计算上一节的三重积分将得到复杂的式子，更好的方法是使用极坐标。首先保持dz不变，将dydx替换成极坐标（可参考《多变量微积分笔记9——极坐标下的二重积分》）：



$$x^2 + y^2 < 2, \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

$$\iiint_R dzdydx = \iiint_R dz r dr d\theta$$
$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{4-x^2-y^2} dzdydx = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{r^2}^{4-r^2} dz r dr d\theta$$

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At) 有些图片挂了呢

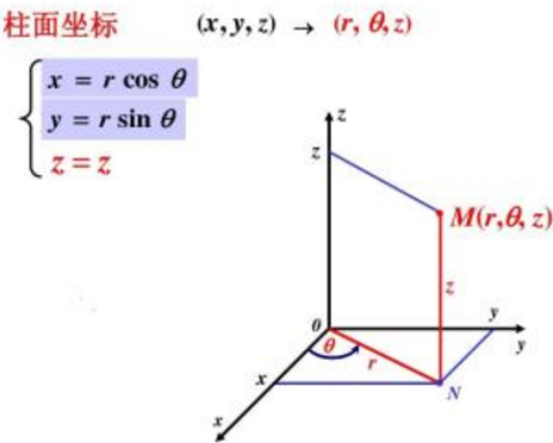
--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中 $v = \sqrt{2gh}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

这种更简单的方法就称为柱坐标法。柱坐标的基本思想是在空间中建立一个点，用极坐标代替它的xy坐标， (r, θ, z) 代替 (x, y, z) ，如下图所示：



在柱坐标系中，积分将转换成：

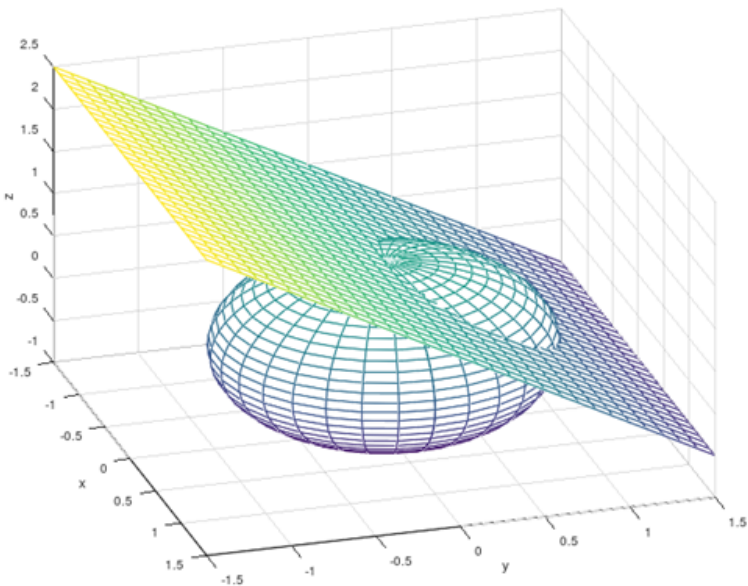
$$dzdydx \rightarrow dzrdrd\theta$$

$$dxdydz \rightarrow rdrd\theta dz$$

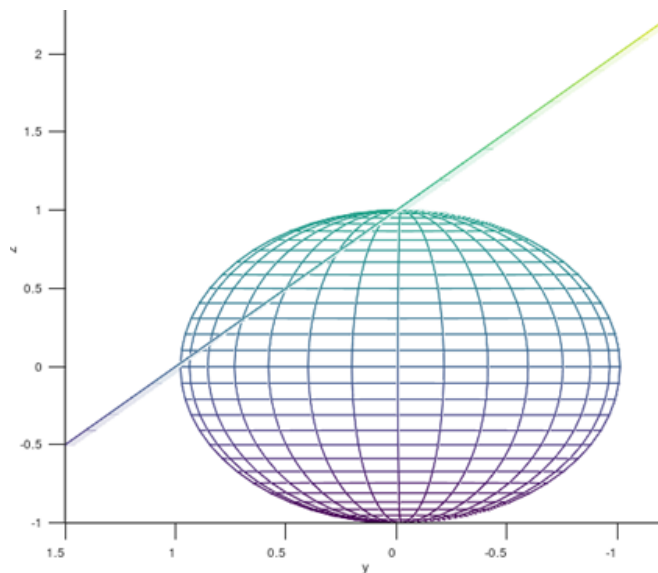
综合示例

示例1

计算单位球和 $z > 1 - y$ 所围的曲面的体积。



将上图转换为“简笔画”——转换为平面坐标系：



yz坐标系

容易得到z的积分域:

$$\int_{1-y}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz$$

现在的问题是xy轴的投影是什么, 即xy的积分域是多少?

由z的积分域可以得到不等式方程:

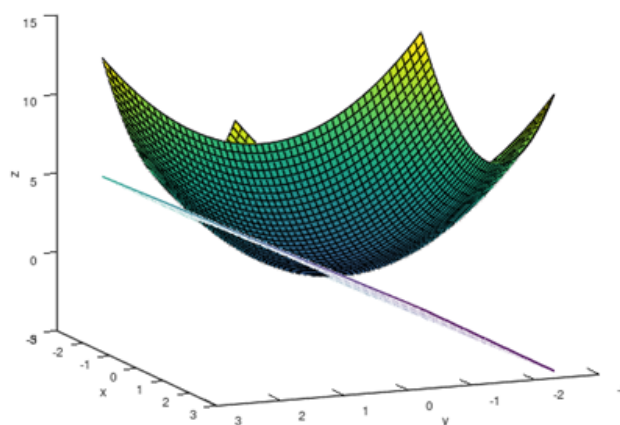
$$\begin{aligned} 1-y < \sqrt{1-x^2-y^2} &\Rightarrow (1-y)^2 < 1-x^2-y^2 \\ &\Rightarrow 0 < x^2-2y^2-2y \end{aligned}$$

已知 $0 < y < 1$, 所以:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{-\sqrt{2y^2-2y}}^{\sqrt{2y^2-2y}} dy dx \\ \iiint_R dz dy dx = \int_0^1 \int_{-\sqrt{2y^2-2y}}^{\sqrt{2y^2-2y}} \int_{1-y}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz dy dx \end{aligned}$$

示例2

计算 $z = x^2 + y^2$ 和 $z = 2y$ 所围的曲面的体积。



Z的积分域:

$$x^2 + y^2 < z < 2y$$

$$x^2 + y^2 < 2y \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y < 0 \Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 < 1$$

可见xy轴的投影是圆。由此可以使用柱坐标系：

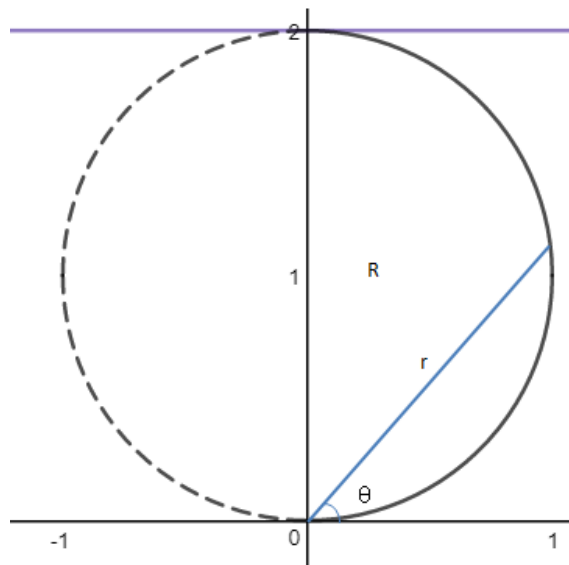
$$x^2 + y^2 < z < 2y$$

$$\Rightarrow r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta < z < 2r \sin \theta$$

$$\Rightarrow r^2 < z < 2r \sin \theta$$

$$\int_{r^2}^{2r \sin \theta} dz = 2r \sin \theta - r^2$$

xy转换为极坐标后， $0 \leq \theta \leq \pi$ ， $r_{\min} = 0$ ， $r_{\max}$ 是r关于 θ 的函数。



$$x^2 + y^2 < 2y \Rightarrow r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2 < 2r \sin \theta \Rightarrow r < 2 \sin \theta$$

$$\iint_R dA = \int_0^\pi \int_0^{2 \sin \theta} r dr d\theta$$

$$\begin{aligned} \iiint_R dz r dr d\theta &= \int_0^\pi \int_0^{2 \sin \theta} \int_{r^2}^{2r \sin \theta} dz r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2 \sin \theta} (2r \sin \theta - r^2) r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{2 \sin \theta r^3}{3} - \frac{1}{4} r^4 \right) \bigg|_{r=0}^{r=2 \sin \theta} d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{4}{3} \sin^4 \theta d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

关于三角函数的积分计算可参考《[数学笔记20——三角替换1 \(sin和cos\)](#)》

作者：我是8位的

出处: <http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注公众号“我是8位的”



随笔

分类: [多变量微积分](#)

标签: [三重积分](#), [柱坐标系](#)

[好文要顶](#)[关注我](#)[收藏该文](#)



[我是8位的](#)
关注 - 5
粉丝 - 288
[+加关注](#)

0

推荐

0

反对

« 上一篇: [多变量微积分笔记18——连通区域](#)
» 下一篇: [图形数据库Neo4J简介](#)

posted on 2018-05-16 21:49 我是8位的 阅读(6314) 评论(0) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

 登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) [博客园首页](#)

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

yo

zodcs.com

广告 X

永中DCS_文档在线预览解决方案

兼容不同版本的Office、PDF等，特定格式的合作，支持Windows、信创环境下一键部署

打开 >

- 编辑推荐:
- 革命性创新，动画杀手锏 @scroll-timeline
 - 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
 - ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
 - .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
 - 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇



最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:

博客园

Copyright © 2022 我是8位的

Powered by .NET 6 on Kubernetes